5. $\{X_t\ ,t \geq 0\}$ poisson süreci ve $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq t < \infty$ bu sürecin geliş anlarıdır. Her bir geliş anı p olasılığı ile sağlanıyor veya $1 - p = q$ olasılığı ile sağlanıyor. N_t ile $(0,t)$ aralığında yerleşen ve sağlanan gelişlerin sayısını gösterelim. Bu durumda N_t , λpt parametreli Poisson dağılımına sahiptir. Yani N_t' nin Poisson süreci olabilmesi için,

$\boldsymbol{a}$. $N_t = 0$

$\boldsymbol{b}$. N_t B.A.S.

$\boldsymbol{c}$. N_t'nin geliş anları X_t'nin geliş anlarıdır.

$$P(N_t = k) = \frac{e^{-\lambda pt}(\lambda pt)^k}{k!} \quad , \quad k = 0,1,2,\dots$$

İspat. Toplam olasılık formülü,

$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A/H_i)P(H_i)$,$i \neq j$ için $P\left(H_i \cap H_j\right) = \emptyset,\ (A \cap H_i) \cap\ (A \cap H_i) = \emptyset,$

$$P(N_t = k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(N_t = k/X_t = n)P(X_t = n) \qquad (1)$$

Sisteme n tane müşteri geldiğinde k tanesinin hizmet alma olasılığı

$$\boldsymbol{P(N_t = k/X_t = n) \qquad n = k, k+1, \dots} \qquad \textbf{(2)}$$

denemedeki geliş anına başarı sonucu gibi bakalım, n tanesinden k tane başarılı sonucun gerçekleşmesi olasılığı(2) olasılığını hesaplamak için Bernoulli denemelerini göz önüne alalım. Her

$$P(N_t = k/X_t = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\ ,\ n = k, k+1, \dots \qquad (3)$$

$$P(X_t = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{n!} \quad , \quad n = 0,1,2, \qquad (4)$$

(3) ve (4) eşitliklerini (1) 'de yerine yazılırsa

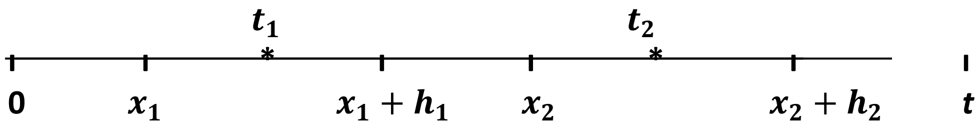
$$\boldsymbol{P(N_t = k) = \frac{e^{-\lambda pt}(\lambda pt)^k}{k!} \quad , \quad k = 0,1,2,\dots}$$

bulunur.

6. $\{\, X_t,\ t \geq 0 \,\}$ λ parametreli Poisson süreci olsun. $t_1 < t_2 < \cdots$ 'ler geliş anlarıdır. $X_t = n$ koşulu altında $(0,t)$ aralığında $t_1, t_2\,,\ \dots\ ,\ t_n$ geliş anlarının ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu

$f(x_1,\ x_2\ ,\dots,x_n\ /\ X_t{=}n) = \frac{n!}{t^n}$; $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$

İspat. $n = 2$ için bu formülün doğruluğunu gösterelim. Bunun için aşağıdaki çizelgeyi göz önüne alalım:



$$f(x_1, x_2/X_t = 2) = \lim_{\substack{h1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{P(x_1 < t_1 < x_1 + h_1, x_2 < t_2 < x_2 + h_2/\ X_t = 2\ )}{h_1 h_2}$$

$$= \lim_{\substack{h1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{P\{(x_1 < t_1 < x_1 + h_1, x_2 < t_2 < x_2 + h_2) \cap\ (X_t = 2\ )\}}{h_1 h_2\ \ P(X_t = 2)}$$

$P\{(x_1 < t_1 < x_1 + h_1, x_2 < t_2 < x_2 + h_2) \cap\ (X_t = 2\ )\} = P(A),$

alındığında,

$$P(A) = e^{-\lambda x_1} e^{-\lambda h_1} \lambda h_1 e^{-\lambda(x_2 - x_1 - h_1)}\ e^{-\lambda h_2}\ \lambda h_2 e^{-\lambda(t - x_2 - h_2\ )}$$

$$P(X_t = 2) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{n!}.$$

Bu olasılıklar $\boldsymbol{f(x_1, x_2/X_t = 2)}$ **de yerine yazılırsa**

$$\boldsymbol{\lim_{\substack{h1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{P(A)}{P(X_t = 2)} = \frac{2!}{t^2}}$$

$$\boldsymbol{f(x_1, x_2/X_t = 2) = \lim_{\substack{h1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{P(A)}{P(X_t = 2)}}$$

$$= \frac{2!}{t^2}\ , \qquad x_1 < x_2$$

X_t=n koşulu altında $t_1, t_2, \dots, t_n{}'$ 'lerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

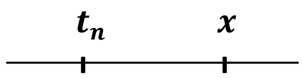
$$f\,(x_1, x_2\,, \dots, x_n\;/X_t = n) \;=\; \frac{n!}{t^n}\;; \quad x_1 < x_2 < \cdots < x_n.$$

Not. *Bu aynı zamanda n tane sıra istatistiği olan $t_1, t_2, \dots, t_n{}'$ lerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonudur.*

7. λ parametreli Poisson sürecinde n. geliş anı $n\; ve\; \lambda$ parametreli gamma dağılımına sahiptir. Yani $t_n{}'$in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\boldsymbol{f_{t_n}(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)}\,, \quad ; \quad \lambda > 0\,,\;\; x > 0}$$

İspat. $(\,t_n < x\,)$ olayını göz önüne alalım. Bunu aşağıdaki çizelge ile gösterelim.



$$(\,t_n < x\,) \;=\; (X(x) \geq n) \Rightarrow P(\,t_n < x\,) = P(X(x) \geq n)$$

$$F_{t_n}(\,x) = \;P(X(x) \geq n)$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!}$$

Bu eşitliğin her iki tarafının türevini alırsak,

$$F'_{t_n}(\,x) = f_{t_n}(\,x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!}(\,\lambda k e^{-\lambda x}(\lambda x)^{k-1} - \lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^k)$$

$$= \lambda e^{-\lambda x} \sum_{k=n}^{\infty} \left\{ \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right\}$$

$$= \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}$$

Ödev. $\{\,X_t,\; t \geq 0\,\}$ λ parametreli Poisson süreci olsun. $t_1 < t_2 < \cdots$ 'ler geliş anlarıdır. $T_i = t_i - t_{i-1}$ olmak üzere ve

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

a) S_n'in olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.
b) $E(3S_n - 2\,S_{n-1})$ beklenen değerini bulunuz.
c) $Var(3S_n - 2S_{n-1})$ veryansını bulunuz.

8. $\{X_t,\ t \geq 0\}$ λ parametreli Poisson süreci olsun. $t_1 < t_2 < \cdots$ 'ler geliş anlarıdır. $t_1, t_2, \ldots, t_n$ geliş anlarının ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu

$$f_n(x_1,\ x_2,\ldots,x_n) = \lambda^n e^{-\lambda x_n} \quad ; \quad x_1 < x_2 < \cdots < x_n.$$

İspat. 1. Yol

$n = 2$ için bu eşitliği ispatlayalım. Bunun için aşağıdaki çizelgeyi göz önüne alalım:

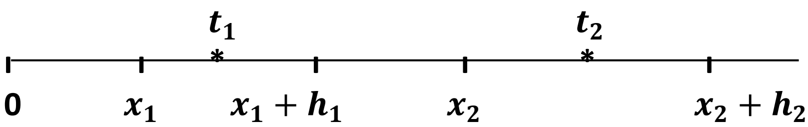
$$f_2(x_1,\ x_2) = \lambda^2 e^{-\lambda x_2} \quad , \quad x_1 < x_2.$$

Yoğunluk fonksiyonunun birbirine denk iki tanımı vardır.

1. $f_2(x_1,\ x_2) = \dfrac{\partial^2 F_2(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$

2. $f_2(x_1, x_2) = \lim\limits_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \dfrac{P(x_1 < t_1 < x_1 + h_1,\ x_2 < t_2 < x_2 + h_2)}{h_1 h_2}$

2. tanımı ve aşağıdaki çizelgeyi göz önüne alalım.



$$P\{(x_1 < t_1 < x_1 + h_1, x_2 < t_2 < x_2 + h_2)\} = P(A),$$

alalım.

$$P(A) = e^{-\lambda x_1} e^{-\lambda h_1} \lambda h_1 e^{-\lambda(x_2 - x_1 - h_1)}\, e^{-\lambda h_2}\, \lambda h_2 e^{-\lambda h_2)}$$

$$f_2(x_1, x_2) = \lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \frac{P(x_1 < t_1 < x_1 + h_1,\ x_2 < t_2 < x_2 + h_2)}{h_1 h_2}$$

$$f_2(x_1,\ x_2) = \lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \frac{e^{-\lambda x_1} e^{-\lambda h_1} \lambda h_1 e^{-\lambda(x_2 - x_1 - h_1)}\, e^{-\lambda h_2}\, \lambda h_2}{h_1 h_2}.$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda x_2} \quad , \quad x_1 < x_2.$$

2. Yol. Dönüştürme yöntemine göre

Poisson sürecinde $t_n = T_1 + \cdots + T_n$ üzere $t_n \sim Gam(\lambda, n)$ ve $T_i = t_i - t_{i-1}$ bağımsız ve $T_i \sim \exp(\lambda)$.

$$f_{T_i}(v_i) = \lambda e^{-\lambda v_i}, \qquad v_i > 0$$

T_1 ve T_2 bağımsız olduğundan

$$f_{T_1 T_2}(v_1, v_2) = \lambda^2 e^{-\lambda(v_1 + v_2)}; \qquad v_1 > 0,\ v_2 > 0$$

$\boldsymbol{t_1 = T_1}$ **,** $\boldsymbol{t_2 = T_1 + T_2}$ **alındığında**

$x_1 = v_1$ **,** $\boldsymbol{x_2 = v_1 + v_2 \Rightarrow v_2 = x_2 - x_1}$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

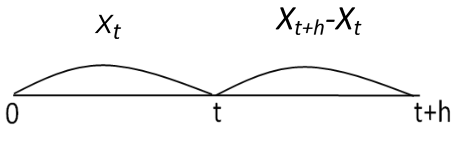
$$\begin{aligned} f_{t_1 t_2}(x_1, x_2) &= f_{t_1 t_2}\big(v_1 = x_1, v_2 = x_2 - x_1\big)|J| \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda(x_1 + x_2 - x_1)} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda x_2}. \end{aligned}$$

Teorem. $\{X_t, t \geq 0\}$ Poisson süreci ise bunun olasılık fonksiyonu

$$P(X_t = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

İspat. X_t ' nin olasılık çıkaran fonksiyonunu,

$$\pi_t(z) = E(z^{X_t}) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X_t = k), \quad |z| \leq 1 \tag{1}$$



$$E(z^{X_t + X_h}) = E(z^{X_t})E(z^{X_t})$$

$$\pi_{t+h}(z) = \pi_t(z)\,\pi_h(z) \tag{2}$$

(2) denkleminin tek bir çözümünün olabilmesi için $\pi_0(z) = 1$ olmalıdır.

$$E(z^{X_0}) = \pi_0(z) = z^0 P(X_0 = 0) + z^1 P(X_0 = 1) + \cdots$$

$$= 1.$$

(2) denkleminin her iki tarafından $\pi_t(z)$ yi çıkartıp limite geçersek,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\pi_{t+h}(z) - \pi_t(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\pi_t(z)\,(\pi_h(z) - 1)}{h}$$

$$\pi'_t(z) = \pi_t(z) \lim_{h \to 0} \frac{(\pi_h(z) - 1)}{h}$$

$\pi_h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X_h = k) = z^0 P(X_h = 0) + z^1 P(X_h = 1) + \cdots$

(3)

$P(X_h = 0) = 1 - \lambda h + o(h), \quad P(X_h = 1) = \lambda h + o(h),, \quad P(X_h = 2) = o(h)$

Değerlerini (3) de yerine yazarsak,

$\pi_h(z) = 1 - \lambda h + z\lambda h + o(h)$ elde edilir. Bu $\pi'_t(z)$ de yazılırsa

$$\pi'_t(z) = \pi_t(z)(-\lambda + z\,\lambda)$$

$$\frac{\pi'_t(z)}{\pi_t(z)} = \frac{\pi_t(z)(-\lambda + z\,\lambda)}{\pi_t(z)}$$

$$\int_0^t (\ln \pi_t(z))'\, dt = \int_0^t (-\lambda + z\,\lambda)\, dt$$

$\ln \pi_t(z) = (-\lambda + z\,\lambda)t \Rightarrow \pi_t(z) = e^{(-\lambda + z\,\lambda)t}$

(1) eşitliğinde $P(X_t = k) = a_k$ olsun

$\pi_t(z) = E(z^{X_t}) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X_t = k) = e^{(-\lambda + z\,\lambda)t} = f(z)$

$$\sum a_k z^k = f(z) \Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Buradan da $\quad a_k = P(X_t = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$

elde edilir. Böylece teorem tamamlanır.